Vers l'optimisation des fonctions de 2 variables

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: R5.04 Traitement numérique des données

Introduction

Motivations :

- Etudier comportement d'une fonction.

Introduction

Motivations :

- Etudier comportement d'une fonction.
- Applications :

Introduction

Motivations :

- Etudier comportement d'une fonction.
- Applications :
  - Etude de fonctions issues de problèmes "économiques"

Introduction

Motivations :

- Etudier comportement d'une fonction.
- Applications :
  - Etude de fonctions issues de problèmes "économiques"
  - Maximiser la fonction "utilité"

Introduction

Motivations :

- Etudier comportement d'une fonction.
- Applications :
  - Etude de fonctions issues de problèmes "économiques"
  - Maximiser la fonction "utilité"

Exemple 1

Le coût d'un produit varie selon la vitesse de production Q, il se traduit par :

$$C(Q) = Q^2 - 6Q + 10.$$

Exemple 1

Le coût d'un produit varie selon la vitesse de production Q, il se traduit par :

$$C(Q) = Q^2 - 6Q + 10.$$

Déterminez le niveau de production donnant un coût minimal.

Exemple 2a

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire.

Exemple 2a

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire. Sa satisfaction est exprimée par sa fonction d'utilité. Cette dernière dépend des quantités consommées des deux biens. Elle est de la forme suivante :

$$U(x, y) = -x^2 + xy.$$

Exemple 2a

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire. Sa satisfaction est exprimée par sa fonction d'utilité. Cette dernière dépend des quantités consommées des deux biens. Elle est de la forme suivante :

$$U(x, y) = -x^2 + xy.$$

Il désire maximiser sa satisfaction/son utilité sachant qu'il ne détient que 20 unités monétaires pour l'achat des biens X et Y.

Exemple 2a

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire. Sa satisfaction est exprimée par sa fonction d'utilité. Cette dernière dépend des quantités consommées des deux biens. Elle est de la forme suivante :

$$U(x, y) = -x^2 + xy.$$

Il désire maximiser sa satisfaction/son utilité sachant qu'il ne détient que 20 unités monétaires pour l'achat des biens X et Y. Problème reformulé :

$\textit{Trouver} \quad \max U(x, y) \quad \textit{sous la contrainte}: \quad 2x + y = 20.$

Exemple 2a

Un individu consomme deux biens X et Y en quantités x et y aux prix respectifs de 2 unités monétaire et 1 unité monétaire. Sa satisfaction est exprimée par sa fonction d'utilité. Cette dernière dépend des quantités consommées des deux biens. Elle est de la forme suivante :

$$U(x,y) = -x^2 + xy.$$

Il désire maximiser sa satisfaction/son utilité sachant qu'il ne détient que 20 unités monétaires pour l'achat des biens X et Y.
Problème reformulé :
Trouver $\max U(x,y)$ *sous la contrainte :* $2x + y = 20$.
Ce qui s'écrit mathématiquement :

$$\max_{\substack{2x+y=20 \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} -x^2 + xy.$$

Exemple 2b

Si l'individu ne souhaite pas utiliser tout son argent, la contrainte prend la forme $2x + y \leqslant 20$.

Exemple 2b

Si l'individu ne souhaite pas utiliser tout son argent, la contrainte prend la forme $2x + y \leqslant 20$. Ainsi, on a le probléme suivant :

$$\max_{\substack{2x+y\leqslant 20\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} -x^2 + xy.$$

- Ces problèmes de recherche de maximums et/ou de minimum rentrent dans la théorie de *l'optimisation*.

- Ces problèmes de recherche de maximums et/ou de minimum rentrent dans la théorie de *l'optimisation*.
- Dans le premier exemple, on a une fonction d'une seule variable.

- Ces problèmes de recherche de maximums et/ou de minimum rentrent dans la théorie de *l'optimisation*.
- Dans le premier exemple, on a une fonction d'une seule variable.
- Dans le second exemple, on a une fonction de deux variables

- Ces problèmes de recherche de maximums et/ou de minimum rentrent dans la théorie de *l'optimisation*.
- Dans le premier exemple, on a une fonction d'une seule variable.
- Dans le second exemple, on a une fonction de deux variables et une contrainte (budgétaire)
  - d'égalité dans 2a,
  - d'inégalité dans 2b.

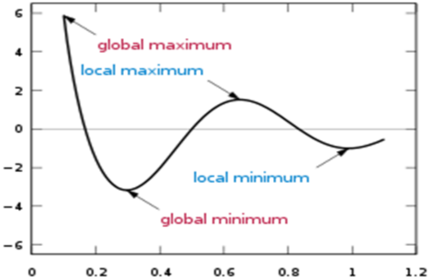
Rappels sur la Terminologie

- x_0 est un maximum local, si il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est inférieure à $f(x_0)$
- x_0 est un maximum global, si pour tout x de $[a, b]$, on a : $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- on définit de même min global et min local.

Definition, Terminologie

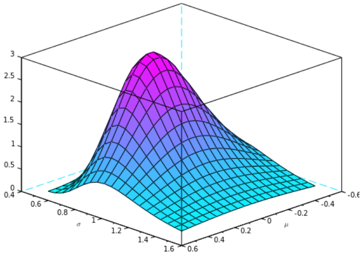
- x_0 est un maximum local, si il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est inférieure à $f(x_0)$
- x_0 est un maximum global, si pour tout x de $[a, b]$, on a : $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- on définit de même min global et min local.

Exemple qui rendra cette définition plus claire :



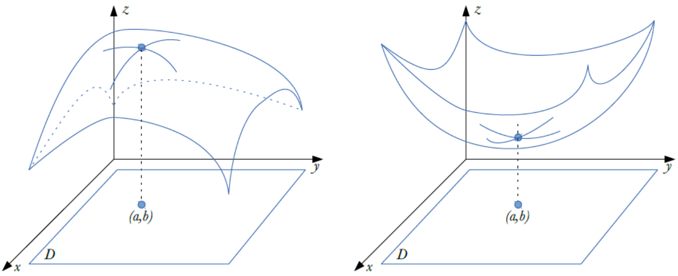
Exemples d'extremums pour une fonction de deux variables

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & f(x;y) \end{array}$$



Exemples d'extremums pour une fonction de deux variables

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & f(x;y) \end{array}$$



1. Optimisation sans contraintes
   - Fonction d'une variable
   - Fonctions de deux variables

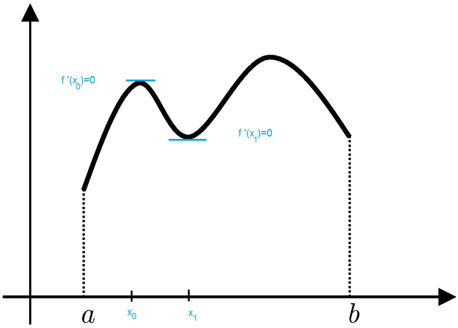
2. Optimisation sous contraintes
   - Contraintes d'égalité, Lagrangien
   - Contraintes d'inégalité (simples)

Condition du 1 er ordre

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, dérivable alors on a :

Proposition

Si le point $x_0 \in]a; b[$ est un extremum, alors $f'(x_0) = 0$

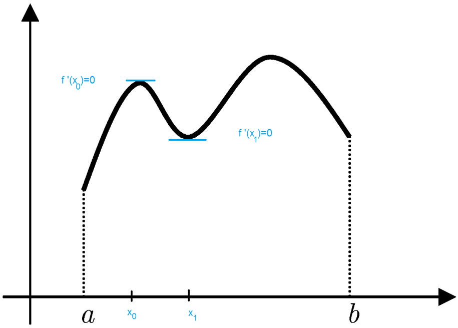


Condition du 1 er ordre

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, dérivable alors on a :

Proposition

Si le point $x_0 \in]a; b[$ est un extremum, alors $f'(x_0) = 0$

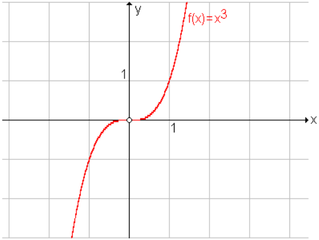


Condition du 1 er ordre

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, dérivable alors on a :

Proposition

Si le point $x_0 \in]a; b[$ est un extremum, alors $f'(x_0) = 0$



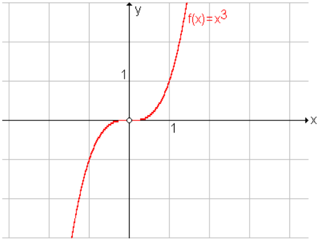
Condition du 1 er ordre

Soit f une fonction de $[a; b] \to \mathbb{R}$, dérivable alors on a :

Proposition

Si le point $x_0 \in]a; b[$ est un extremum, alors $f'(x_0) = 0$

Attention, c'est une condition nécessaire ! La réciproque est fausse : Prenons $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0$.
On a $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est ni un max, ni un min.



Condition du 1^{er} ordre

La réciproque "devient" vraie, si l'on impose que f' change de signe en x_0.

Condition du 1^{er} ordre

La réciproque "devient" vraie, si l'on impose que f' change de signe en x_0. f est alors croissante puis décroissante (ou décroissante puis croissante) et on a bien un extremum.

Condition du 1^{er} ordre

La réciproque "devient" vraie, si l'on impose que f' change de signe en x_0. f est alors croissante puis décroissante (ou décroissante puis croissante) et on a bien un extremum.

Proposition

SI $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, ALORS le point x_0 est un extremum (local).

Condition du 1^{er} ordre

La réciproque "devient" vraie, si l'on impose que f' change de signe en x_0. f est alors croissante puis décroissante (ou décroissante puis croissante) et on a bien un extremum.

Proposition

SI $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, ALORS le point x_0 est un extremum (local).

Condition du 2^{nd} ordre

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Proposition

- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) > 0$, *ALORS le point* x_0 *est un minimum (local).*
- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) < 0$, *ALORS le point* x_0 *est un maximum (local).*

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Proposition

- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) > 0$*, ALORS le point* x_0 *est un minimum (local).*
- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) < 0$*, ALORS le point* x_0 *est un maximum (local).*

Exemple trivial : Soit $f(x) = (x-5)^2$.

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Proposition

- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) > 0$, *ALORS le point* x_0 *est un minimum (local).*
- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) < 0$, *ALORS le point* x_0 *est un maximum (local).*

Exemple trivial : Soit $f(x) = (x-5)^2$. On sait à l'avance que $x_0 = 5$ est un min global. Retrouvons ce fait (en local).

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Proposition

- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) > 0$, *ALORS le point* x_0 *est un minimum (local).*
- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) < 0$, *ALORS le point* x_0 *est un maximum (local).*

Exemple trivial : Soit $f(x) = (x-5)^2$. On sait à l'avance que $x_0 = 5$ est un min global. Retrouvons ce fait (en local).
On a $f'(x) = 2(x-5)$ et $f''(x) = 2$.

Condition du 2^{nd} ordre

Si la fonction f est un peu plus régulière (continument dérivable 2 fois, noté $C^2([a;b],\mathbb{R})$), on a un critère plus "pratique" pour dire, si on est en présence d'un extremum.

Proposition

- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) > 0$*, ALORS le point* x_0 *est un minimum (local).*
- *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) < 0$*, ALORS le point* x_0 *est un maximum (local).*

Exemple trivial : Soit $f(x) = (x-5)^2$. On sait à l'avance que $x_0 = 5$ est un min global. Retrouvons ce fait (en local).
On a $f'(x) = 2(x-5)$ et $f''(x) = 2$.
Ainsi, $f'(5) = 0$ et $f''(5) = 2 > 0$, donc par la propriété, $x_0 = 5$ est bien un min local.

Condition nécessaire

$$\text{Soit } f :]a;b[\times]c;d[\to \mathbb{R}, \quad (x;y) \mapsto f(x;y)$$

dérivable par rapport à chacune de ses variables.

Condition nécessaire

$$\text{Soit } f :]a; b[\times]c; d[\; \to \; \mathbb{R}$$
$$(x; y) \mapsto f(x; y)$$

dérivable par rapport à chacune de ses variables. On a :

Proposition

Si le point (x_0, y_0) est un extremum de f, ALORS

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Lorsque les 2 dérivées partielles sont nulles en $(x_0; y_0)$, on dit que $(x_0; y_0)$ est un point critique.

Condition nécessaire

On appelle gradient de f en $(x_0; y_0)$, et on note $\nabla f(x_0; y_0)$, le vecteur :

$$\nabla f(x_0; y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

La propriété précédente peut alors s'enoncer ainsi :

Proposition

Si le point (x_0, y_0) est un extremum de f, ALORS

$$\nabla f(x_0; y_0) = (0, 0).$$

Condition nécessaire

Attention, la réciproque est encore fausse. Considèrer le contre exemple suivant :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x; y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

Condition nécessaire

Attention, la réciproque est encore fausse. Considèrer le contre exemple suivant :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

$(0;0)$ est un point critique mais n'est pas un extremum.
En effet, f prend des valeurs positives et négatives à coté de $(0;0)$. [$f(x;x) \geqslant 0$ et $f(x;-x) \leqslant 0$.]

Condition nécessaire

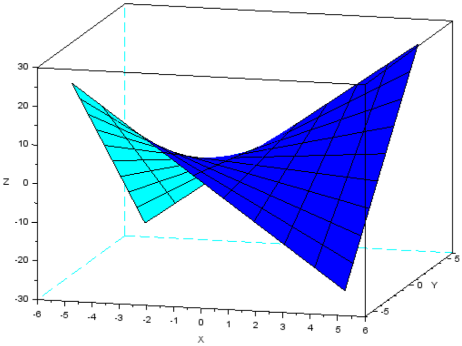
Attention, la réciproque est encore fausse. Considèrer le contre exemple suivant :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

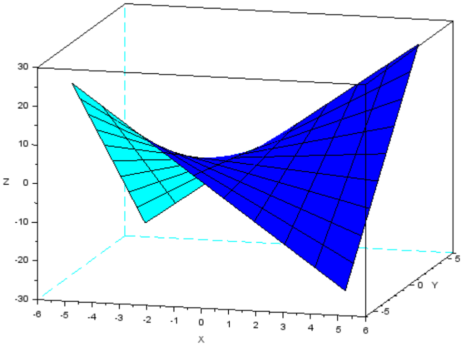
$(0;0)$ est un point critique mais n'est pas un extremum.
En effet, f prend des valeurs positives et négatives à coté de $(0;0)$. [$f(x;x) \geqslant 0$ et $f(x;-x) \leqslant 0$.]

Exo : Essayer de représenter f. [Se fixer une variable, et regarder la fonction d'une variable ainsi obtenue puis faire de même avec l'autre variable]

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy. \end{array}$$



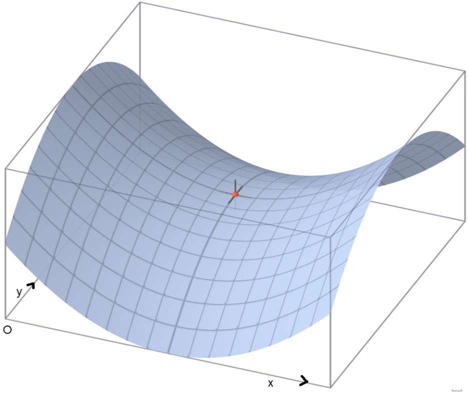
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy. \end{array}$$



Points selle

Plus généralement, il existe des points (dit "selle" ou "col"), tels que :

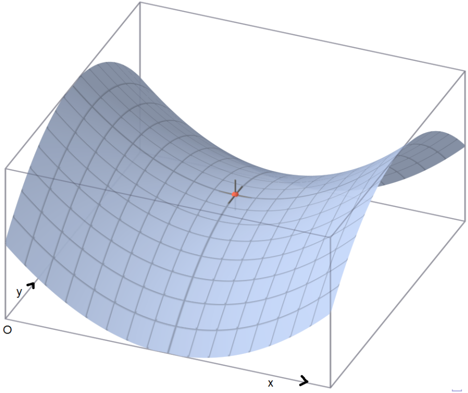
- à y fixé, dans la direction (Ox) on a un minimum,
- à x fixé, dans la direction (Oy) on a un maximum.



Points selle

Plus généralement, il existe des points (dit "selle" ou "col"), tels que :

- à y fixé, dans la direction (Ox) on a un minimum,
- à x fixé, dans la direction (Oy) on a un maximum.



Condition suffisante (ordre 2) pour extremums locaux

$$\text{Soit } f :]a;b[\times]c;d[\to \mathbb{R}$$
$$(x;y) \mapsto f(x;y)$$

continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables.

Condition suffisante (ordre 2) pour extremums locaux

$$\text{Soit } f :]a;b[\times]c;d[\quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$(x;y) \quad \mapsto \quad f(x;y)$$

continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables. On note usuellement :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0), \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0), \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Condition suffisante (ordre 2) pour extremums locaux

$$\text{Soit } f :]a; b[\times]c; d[\;\to\; \mathbb{R}$$
$$(x; y) \;\mapsto\; f(x; y)$$

continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables. On note usuellement :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0),\; t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0),\; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

On appelle matrice Hessienne de f en $(x_0; y_0)$, la matrice :

$$H_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque

Remarque

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux 2 variables considérées. (Théorème de Schwarz)

Remarque

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux 2 variables considérées. (Théorème de Schwarz)
La matrice Hessienne est donc une matrice symétrique et notre définition de s a bien un sens,

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Condition suffisante (ordre 2) pour extremums locaux

Proposition

Soit $(x_0; y_0)$ *un point critique de* f*, alors*

- *si* $rt - s^2 > 0$ *et* $r + t > 0$*, le point* $(x_0; y_0)$ *est un min local,*
- *si* $rt - s^2 > 0$ *et* $r + t < 0$*, le point* $(x_0; y_0)$ *est un max local,*
- *si* $rt - s^2 < 0$ *, on a un point selle,*
- *si* $rt - s^2 = 0$*, on ne peut pas conclure.*

Condition suffisante (ordre 2)

Sachant que $det[H_{(x_0,y_0)}] = rt - s^2$ et que $Tr(H_{(x_0,y_0)}) = r + t$, on peut retenir la propriété ainsi :

Proposition

Si $\nabla f(x_0; y_0) = \overrightarrow{0}$ *, alors*

- *si* $det[H_{(x_0,y_0)}] > 0$ *et* $Tr(H_{(x_0,y_0)}) > 0$*, le point* $(x_0; y_0)$ *est un min local,*
- *si* $det[H_{(x_0,y_0)}] > 0$ *et* $Tr(H_{(x_0,y_0)}) < 0$*, le point* $(x_0; y_0)$ *est un max local,*
- *si* $det[H_{(x_0,y_0)}] < 0$*, on a un point selle,*
- *si* $det[H_{(x_0,y_0)}] = 0$*, on ne peut pas conclure.*

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.
On a :

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 4x \ ; \ 2xy + 2y) \ \ et \ \ H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.
On a :

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 4x \ ; \ 2xy + 2y) \ \text{ et } \ H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont donc solution de

$$\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.
On a :

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 4x \,;\, 2xy + 2y) \text{ et } H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont donc solution de

$$\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

On trouve 3 couples solutions :

$$M_1 = (-1;2),\ M_2 = (-1;-2) \text{ et } M_3 = (0;0).$$

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.
On a :

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 4x\ ;\ 2xy + 2y) \ \text{ et } \ H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont donc solution de

$$\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

On trouve 3 couples solutions :

$$M_1 = (-1;2),\ M_2 = (-1;-2) \text{ et } M_3 = (0;0).$$

[ceux sont potentiellement des extremums...]

Exemple 1

Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.
On a :

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 4x \ ; \ 2xy + 2y) \ \ et \ \ H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont donc solution de

$$\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

On trouve 3 couples solutions :

$$M_1 = (-1;2), \ M_2 = (-1;-2) \ et \ M_3 = (0;0).$$

[ceux sont potentiellement des extremums...]

Examinons chacun des points critiques :

Examinons chacun des points critiques :

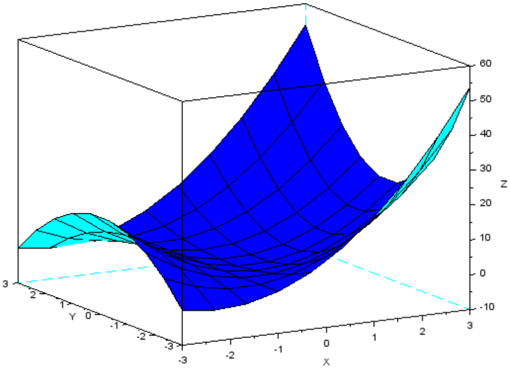
- pour $M_1 = (-1;2)$, on a $H_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(-1,2)}) = -16 < 0$. Ainsi M_1 est un point selle.

Examinons chacun des points critiques :

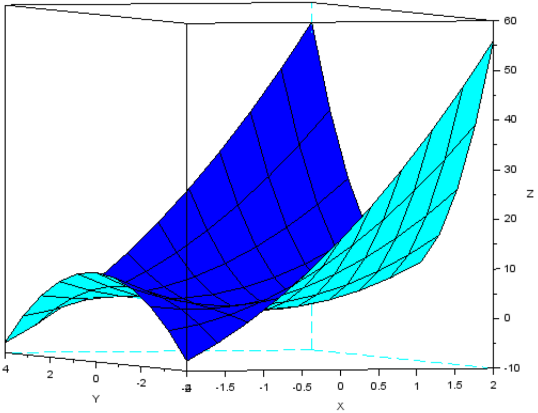
- pour $M_1 = (-1; 2)$, on a $H_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(-1,2)}) = -16 < 0$. Ainsi M_1 est un point selle.
- pour $M_2 = (-1; -2)$, on a $H_{(-1,-2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(-1,-2)}) = -16 < 0$. Ainsi M_2 est un point selle.

Examinons chacun des points critiques :

- pour $M_1 = (-1; 2)$, on a $H_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(-1,2)}) = -16 < 0$. Ainsi M_1 est un point selle.
- pour $M_2 = (-1; -2)$, on a $H_{(-1,-2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(-1,-2)}) = -16 < 0$. Ainsi M_2 est un point selle.
- pour $M_3 = (0; 0)$, on a $H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $det(H_{(0,0)}) = 8 > 0$ et $Tr(H_{(0,0)}) = 6 > 0$. Ainsi M_3 est un min local.



Points selle : $M_1 = (-1; 2)$, $M_2 = (-1; -2)$ et min : $M_3 = (0; 0)$.



Points selle : $M_1 = (-1; 2)$, $M_2 = (-1; -2)$ et min : $M_3 = (0; 0)$.

Exemple 2

Soient (x_i, y_i) un nuage de points. Réaliser un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, revient à minimiser une certaine distance Z... Une droite D non parallèle à l'axe (Oy) étant déterminée par son coeff directeur a et son ordonnée à l'origine b, on considère l'application suivante :

Exemple 2

Soient (x_i, y_i) un nuage de points. Réaliser un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, revient à minimiser une certaine distance Z... Une droite D non parallèle à l'axe (Oy) étant déterminée par son coeff directeur a et son ordonnée à l'origine b, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (a, b) & \mapsto & Z = \sum_i (y_i - a x_i - b)^2 \end{array}$$

Exemple 2

Soient (x_i, y_i) un nuage de points. Réaliser un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, revient à minimiser une certaine distance Z... Une droite D non parallèle à l'axe (Oy) étant déterminée par son coeff directeur a et son ordonnée à l'origine b, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (a,b) & \mapsto & Z = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2 \end{array}$$

Pour retrouver les expressions connues de a et b, on déroule la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Voir preuve vue au S2...

1. Optimisation sans contraintes
   - Fonction d'une variable
   - Fonctions de deux variables

2. Optimisation sous contraintes
   - Contraintes d'égalité, Lagrangien
   - Contraintes d'inégalité (simples)

Introduction

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).

Introduction

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).
- Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g.

Introduction

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).
- Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y),$$

Introduction

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).
- Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

Introduction

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).
- Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \ \text{tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \ \text{tel que} \\ g(x,y)=c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

Introduction

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

Introduction

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

- Cette méthode d'optimisation fait appel à ce que l'on appelle le Lagrangien L, qui est une fonction de 3 variables définies à l'aide de f et g.

Introduction

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

- Cette méthode d'optimisation fait appel à ce que l'on appelle le Lagrangien L, qui est une fonction de 3 variables définies à l'aide de f et g.
- La fonction Lagrangienne notée $L(x, y, \lambda)$, est définie "formellement" ainsi :

$$L(x, y, \lambda) = \text{ Fonction à optimiser } + \lambda(\text{ contrainte annulée}),$$

Introduction

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

- Cette méthode d'optimisation fait appel à ce que l'on appelle le Lagrangien L, qui est une fonction de 3 variables définies à l'aide de f et g.
- La fonction Lagrangienne notée $L(x, y, \lambda)$, est définie "formellement" ainsi :

$$L(x,y,\lambda) = \text{ Fonction à optimiser } + \lambda(\text{ contrainte annulée}),$$

$$ie : \quad L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c)$$

Introduction

$$\max_{g(x,y)=c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)=c} f(x,y).$$

- Cette méthode d'optimisation fait appel à ce que l'on appelle le Lagrangien L, qui est une fonction de 3 variables définies à l'aide de f et g.
- La fonction Lagrangienne notée $L(x, y, \lambda)$, est définie "formellement" ainsi :

$$L(x, y, \lambda) = \text{ Fonction à optimiser } + \lambda(\text{ contrainte annulée}),$$

$$ie: \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

Condition nécessaire

Soit f une fonction continument dérivable.

Proposition

Si f posséde un extremum en (x_0, y_0) et si $\nabla g_{(x_0,y_0)} \neq 0$, alors il existe un $\lambda^\star$ tel que $(x_0, y_0, \lambda^\star)$ soit un point critique de L.

$$ie: \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \end{array} \right.$$

Condition nécessaire

Soit f une fonction continument dérivable.

Proposition

Si f posséde un extremum en (x_0, y_0) et si $\nabla g_{(x_0,y_0)} \neq 0$, alors il existe un $\lambda^\star$ tel que $(x_0, y_0, \lambda^\star)$ soit un point critique de L.

$$ie : \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda^\star) = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi un systéme, qui nous permet de trouver les coordonnées des extréma potentiels

Interprétation géométrique, gradient de f et g liés...

Condition suffisante

Soit f une fonction deux fois continuement dérivable. Comme avec deux variables, la Hessienne de L est la matrice suivante :

$$H_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

Condition suffisante

Soit f une fonction deux fois continument dérivable. Comme avec deux variables, la Hessienne de L est la matrice suivante :

$$H_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

Connaissant les potentiels extrema, on a :

Condition suffisante

Soit f une fonction deux fois continument dérivable. Comme avec deux variables, la Hessienne de L est la matrice suivante :

$$H_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

Connaissant les potentiels extrema, on a :

Proposition

Soit $(x_0, y_0, \lambda^\star)$ un point critique de L et soit $H(x,y,\lambda)$ la matrice Hessienne de L, alors

- *si det$(H_{(x_0,y_0,\lambda^\star)}) > 0$, le point $(x_0, y_0, \lambda^\star)$ est un maximum,*
- *si det$(H_{(x_0,y_0,\lambda^\star)}) < 0$, le point $(x_0, y_0, \lambda^\star)$ est un minimum,*
- *si det$(H_{(x_0,y_0,\lambda^\star)}) = 0$, on ne peut rien dire.*

Remarque

Il est facile de vérifier que la Hessienne $H_{(x,y,\lambda)}$ de L est aussi égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

Remarque

Il est facile de vérifier que la Hessienne $H_{(x,y,\lambda)}$ de L est aussi égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

On appelle cette "forme" de matrice : la Hessienne bordée.

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x, y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x, y) = 20$, où $g(x, y) = 2x + y$

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x, y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x, y) = 20$, où $g(x, y) = 2x + y$

- 1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s)

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x, y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x, y) = 20$, où $g(x, y) = 2x + y$

- <u>1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s)</u>
  - Pour tout (x, y), on a $\nabla g_{(x,y)} = (2, 1) \neq 0$, on peut donc appliquer la propriété précédente.

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x, y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x, y) = 20$, où $g(x, y) = 2x + y$

- 1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s)
  - Pour tout (x, y), on a $\nabla g_{(x,y)} = (2, 1) \neq 0$, on peut donc appliquer la propriété précédente.
  - Le Lagrangien est $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - 20)$.

$$ie: \quad L(x, y, \lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20).$$

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x,y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x,y) = 20$, où $g(x,y) = 2x + y$

- 1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s)
  - Pour tout (x,y), on a $\nabla g_{(x,y)} = (2,1) \neq 0$, on peut donc appliquer la propriété précédente.
  - Le Lagrangien est $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - 20)$.

$$ie: \quad L(x,y,\lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20).$$

  - (x,y,λ) est un point critique de L si

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{array}\right. \quad ie: \left\{\begin{array}{l} -2x + y + 2\lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ 2x + y - 20 = 0 \end{array}\right.$$

Exemple 1, avec utilisation du Lagrangien

Optimiser $f(x,y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x,y) = 20$, où $g(x,y) = 2x + y$

- <u>1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s)</u>
  - Pour tout (x,y), on a $\nabla g_{(x,y)} = (2,1) \neq 0$, on peut donc appliquer la propriété précédente.
  - Le Lagrangien est $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - 20)$.

$$ie: \quad L(x,y,\lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20).$$

  - (x,y,λ) est un point critique de L si

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \quad ie: \begin{cases} -2x + y + 2\lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ 2x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

  - On trouve $(x,y,\lambda) = (\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})$.

- 2^{me} étape : Nature de(s) point(s) critique(s) trouvé(s)

- 2^{me} étape : Nature de(s) point(s) critique(s) trouvé(s)
  - On calcule la Hessienne de L (ou la Hessienne de f bordée par la contrainte g)

- 2^{me} étape : Nature de(s) point(s) critique(s) trouvé(s)
  - On calcule la Hessienne de L (ou la Hessienne de f bordée par la contrainte g)
  - $$\begin{aligned} H_{(x,y,\lambda)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 2^{me} étape : Nature de(s) point(s) critique(s) trouvé(s)
  - On calcule la Hessienne de L (ou la Hessienne de f bordée par la contrainte g)
  - $$\begin{aligned} H_{(x,y,\lambda)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  - En particulier, $Det(H_{(\frac{10}{3},\frac{40}{3},-\frac{10}{3})}) = 6 > 0$ et donc $(\frac{10}{3},\frac{40}{3},-\frac{10}{3})$est un max.

Exemple 2, sans utilisation du Lagrangien

Dans ce cas très particulier, on peut retrouver le résultat de manière élémentaire. Ici, la contrainte $2x + y = 20$ est "simple" et on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre.

Exemple 2, sans utilisation du Lagrangien

Dans ce cas très particulier, on peut retrouver le résultat de manière élémentaire. Ici, la contrainte $2x + y = 20$ est "simple" et on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre. Par exemple, on a :

$$y = 20 - 2x.$$

Exemple 2, sans utilisation du Lagrangien

Dans ce cas très particulier, on peut retrouver le résultat de manière élémentaire. Ici, la contrainte $2x + y = 20$ est "simple" et on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre. Par exemple, on a :

$$y = 20 - 2x.$$

Ainsi, on est ramené à optimiser une fonction h d'une variable, définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, 20 - 2x), \\ &= -x^2 + x(20 - 2x), \\ &= -3x^2 + 20x. \end{aligned}$$

Exemple 2, sans utilisation du Lagrangien

Dans ce cas très particulier, on peut retrouver le résultat de manière élémentaire. Ici, la contrainte $2x + y = 20$ est "simple" et on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre. Par exemple, on a :

$$y = 20 - 2x.$$

Ainsi, on est ramené à optimiser une fonction h d'une variable, définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, 20 - 2x), \\ &= -x^2 + x(20 - 2x), \\ &= -3x^2 + 20x. \end{aligned}$$

L'étude de h est triviale, h atteint un max en $x = 10/3$.

Exemple 2, sans utilisation du Lagrangien

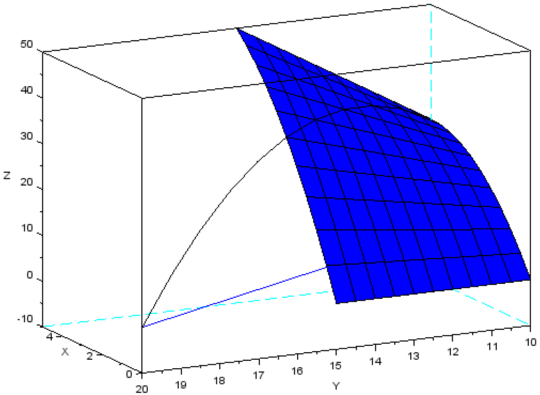
Dans ce cas très particulier, on peut retrouver le résultat de manière élémentaire. Ici, la contrainte $2x + y = 20$ est "simple" et on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre. Par exemple, on a :

$$y = 20 - 2x.$$

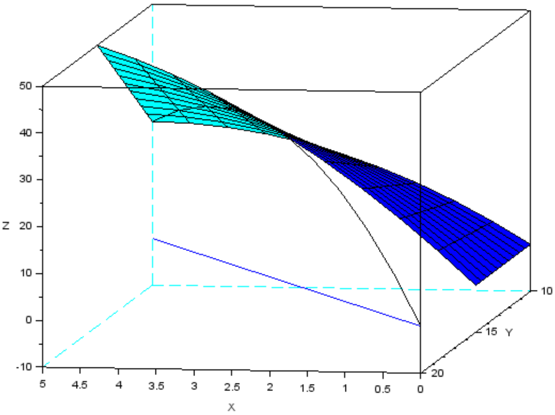
Ainsi, on est ramené à optimiser une fonction h d'une variable, définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, 20 - 2x), \\ &= -x^2 + x(20 - 2x), \\ &= -3x^2 + 20x. \end{aligned}$$

L'étude de h est triviale, h atteint un max en $x = 10/3$.
Et on retrouve bien que le point $(10/3, 40/3)$ est un max pour f.



Point max $(10/3; 40/3)$



Point max $(10/3; 40/3)$

1. Optimisation sans contraintes
   - Fonction d'une variable
   - Fonctions de deux variables

2. Optimisation sous contraintes
   - Contraintes d'égalité, Lagrangien
   - Contraintes d'inégalité (simples)

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante.

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \ tel\ que \\ g(x,y) \leqslant c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \ tel\ que \\ g(x,y) \leqslant c}} f(x,y),$$

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y) \leqslant c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y) \leqslant c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y) \leqslant c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y) \leqslant c} f(x,y).$$

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y).$$

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \ tel\ que \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \ tel\ que \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y).$$

- Le cas général de ce pb est compliqué et fait appel aux conditions de Kuhn et Tucker

Introduction

On examine ici l' optimisation d'une fonction f à plusieurs variables, sous la contrainte d'une autre fonction g inférieure à une constante. Par ex :

$$\max_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y) \quad ou \quad \min_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ g(x,y)\leqslant c}} f(x,y),$$

que l'on écrira plus simplement ainsi

$$\max_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y) \quad ou \quad \min_{g(x,y)\leqslant c} f(x,y).$$

- Le cas général de ce pb est compliqué et fait appel aux conditions de Kuhn et Tucker
- On se contentera de cas simples, résolvables graphiquement.

Exemple

Un restaurateur veut acheter, pour sa salle de restaurant d'une surface de 100 m^2, des tables rondes et des tables carrées. Une table ronde permet de servir 8 couverts, occupe 8 m^2 et coûte 300 euros. Une table carrée permet de servir 4 couverts, occupe 6 m^2 et coûte 150 euros. Le restaurateur dispose d'un budget de 3000 euros et veut servir au moins 40 couverts. On note x le nombre de tables rondes et y le nombre de tables carrées qu'il veut acheter.

1. Exprimer, à l'aide d'un système d'inégalités sur x et y, les contraintes imposées par l'énoncé.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble $\mathcal{S}$ des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système obtenu (on hachurera la partie du plan qui n'est pas solution).
3. On suppose que les tables sont complètement occupées. Les tables rondes laissent alors chacune un bénéfice de 40 euros au restaurateur et les tables carrées chacune un bénéfice de 25 euros. Exprimer en fonction de x et y le bénéfice total $B(x\ ;\ y)$ réalisé.

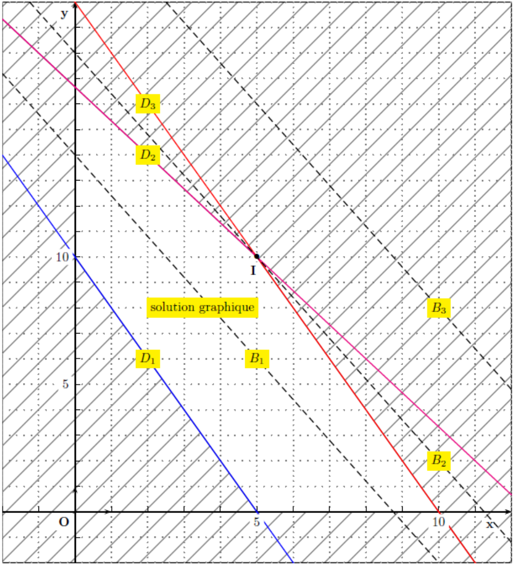
4. Représenter les ensembles (droites) B_1 et B_2 obtenus pour un bénéfice respectivement de 350 euros et 450 euros.
5. Peut-on avoir un bénéfice de 600 euros ?
6. Quel est le bénéfice maximal et quels sont alors les nombres de tables que le restaurateur doit acheter (on justifiera la méthode utilisée) ?

1. Les contraintes de l'énoncé conduisent au système d'inéquations :

$$\begin{cases} 8x + 4y \geqslant 40 \\ 8x + 6y \leqslant 100 \\ 300x + 150y \leqslant 3000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

que l'on peut simplifier :

$$(S') \begin{cases} 2x + y \geqslant 10 \\ 4x + 3y \leqslant 50 \\ 2x + y \leqslant 20 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$


y
D_3
D_2
10
I
solution graphique
B_3
D_1
B_1
5
B_2
O
5
10
x

4. Le bénéfice en fonction de x et y est :

$$B(x, y) = 40x + 25y$$

4. Le bénéfice en fonction de x et y est :

$$B(x, y) = 40x + 25y$$

5. $40x + 25y = 350$ se simplifie : $8x + 5y = 70$. C'est l'équation d'une droite B_1 passant par :$(5\;;\;6)$ et $(0\;;\;14)$.
$40x + 25y = 450$ se simplifie : $8x + 5y = 90$. C'est l'équation d'une droite B_2 passant par :$(5\;;\;10)$ et $(0\;;18)$.

4. Le bénéfice en fonction de x et y est :

$$B(x, y) = 40x + 25y$$

5. $40x + 25y = 350$ se simplifie : $8x + 5y = 70$. C'est l'équation d'une droite B_1 passant par :$(5\ ;\ 6)$ et $(0\ ;\ 14)$.
   $40x + 25y = 450$ se simplifie : $8x + 5y = 90$. C'est l'équation d'une droite B_2 passant par :$(5\ ;\ 10)$ et $(0\ ;18)$.
6. Un bénéfice de 600 euros correspond à la droite B_3 : $8x + 5y = 120$. Il est impossible (voir graphique).

4. Le bénéfice en fonction de x et y est :

$$B(x, y) = 40x + 25y$$

5. $40x + 25y = 350$ se simplifie : $8x + 5y = 70$. C'est l'équation d'une droite B_1 passant par :$(5\ ;\ 6)$ et $(0\ ;\ 14)$. $40x + 25y = 450$ se simplifie : $8x + 5y = 90$. C'est l'équation d'une droite B_2 passant par :$(5\ ;\ 10)$ et $(0\ ; 18)$.
6. Un bénéfice de 600 euros correspond à la droite B_3 : $8x + 5y = 120$. Il est impossible (voir graphique).
7. Les droites B_1 , B_2 et B_3 sont parallèles et la position maximale est celle de B_2 passant par I (intersection de D_2 et D_3) : il faut donc acheter $x = 5$ et $y = 10$ tables de chaque sorte pour un bénéfice de : $40 \times 5 + 25 \times 10 = 450$ euros.

On vient donc de résoudre le pb suivant d'optimisation :

$$\max_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 4x+3y \leqslant 50 \\ 2x+y \geqslant 10 \\ 2x+y \leqslant 20}} B(x,y)$$